Der Chancenstreifen - Ein didaktisches Hilfsmittel zur Erarbeitung des Begriffs „Chance“ in der Primarstufe und zu Beginn der Sekundarstufe I

Andreas Kirsche und Lisza Hohloch, Universität Erfurt

Zusammenfassung: *In diesem Beitrag führen wir den Chancenstreifen als didaktisches Hilfsmittel zur Erarbeitung des Begriffs „Chance“ ein. Das Verwenden von Chancenstreifen ermöglicht bereits in der Primarstufe einen Vergleich von Chancen auf der ikonischen Ebene. Zu Beginn der Sekundarstufe I unterstützt er die Erarbeitung des quantitativen Wahrscheinlichkeitsmaßes. Da Chancenstreifen nur bei stochastischen Vorgängen angewendet werden können, bei denen ein Laplace-Modell angenommen werden kann, birgt dessen Verwendung das Potential, den in der Sekundarstufe I zu erarbeitenden Aspekt der Gleichwahrscheinlichkeit weiter zu vertiefen.*

1 Einleitung

In ihrer Broschüre Leitidee „Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit“ geben die Autoren Kurtzmann und Sill (2014) an, dass es sinnvoll ist, Wahrscheinlichkeiten in der Primarstufe auch durch Angabe von Chancen zu beschreiben (vgl. Kurtzmann und Sill 2014, S. 59). Da jedoch der Vergleich von Chancen auf der beschreibenden Ebene sehr anspruchsvoll ist, sollte dies erst Bestandteil der weiterführenden Schule sein (vgl. Sill und Kurtzmann 2019, S. 233). Das hier vorgestellte didaktische Mittel *Chancenstreifen*, erstmals erwähnt in der Masterarbeit der Mitautorin Lisza Hohloch (vgl. Hohloch, 2019), birgt das Potential, diese Empfehlung zu revidieren und den Vergleich von Chancen bereits in der Grundschule erfahrbar zu machen, mindestens jedoch vor Einführung der Bruchrechnung zu Beginn der Sekundarstufe I.

Trotz des oft in Literatur und Alltag anzutreffenden synonymen Gebrauchs der Begriffe „Wahrscheinlichkeit“ und „Chance“ (oder auch „Gewinnchance“) sind diese aus fachlicher Sicht verschieden (vgl. Sill und Kurtzmann 2019 S. 229). Durch das Verwenden von Chancenstreifen kann bereits in der Primarstufe die fachlich korrekte Nutzung des Begriffs „Chance“ insbesondere durch den hierdurch ermöglichten Vergleich von Chancen vertieft werden.

Dies motiviert den hier vorliegenden Beitrag. Abschnitt 2 beschäftigt sich zunächst mit der alltäglichen und mathematischen Bedeutung des Begriffs „Chance“ und stellt den Chancenstreifen vor. In Abschnitt 3 wird dieser dann fachdidaktisch untersucht. Abschnitt 4 liefert einen kurzen Ausblick zur unterrichtsmethodischen Umsetzung.

2 Der Chancebegriff

2.1 Wortbedeutung

Im Online-Wörterbuch `de.wiktionary.org` kann nachgelesen werden, dass das Wort *Chance* dem französischen „chance“ (u.a. für *Glück*) entlehnt ist, welches seinerseits seine Wurzeln im lateinischen „cadere“ (*fallen*) hat. Umgangssprachlich werden Chancen in unterschiedlichen Zusammenhängen genutzt, z.B. bei folgenden Wendungen:

1. *„Gib mir noch eine zweite Chance.“*
2. *„Die Chance zu gewinnen ist hoch.“*
3. *„Du hast keine Chance, aber nutze sie.“*

Während die erste Wendung eine Anfrage zu einem erneuten Spiel (im Sinne eines stochastischen Vorgangs) ist, kann in den beiden anderen ein Bezug zum mathematischen Begriff gefunden werden. In der zweiten Wendung kann die Chance als eine Wahrscheinlichkeit gedeutet werden. In der dritten Wendung, die ursprünglich in Achternbuschs Film „*Die Atlantikschwimmer*“ (1976) als letzter Satz geäußert wird und die Ausweglosigkeit der betrachteten Situation beschreibt, wird die Chance als (hier fehlende) Möglichkeit beschrieben.

Im englischsprachigen Raum wird statt chance (engl. u.a. für Zufall) der Begriff *odds* verwendet. Als Verhältnis aus der Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses und der Wahrscheinlichkeit dessen Nichteintritts umschreibt dieser Begriff den im deutschsprachigen Raum verwendeten mathematischen Aspekt des Begriffs Chance. Die Bezeichnung *odds* wird jedoch auch im Sinne von Gewinnquoten verwendet. Diese geben an, wie das Verhältnis aus Gewinn und Einsatz ist. Interessant dabei ist, dass die Gewinnquote einen indirekten Bezug zur Chance hat. Je höher sie ist, desto geringer ist die Chance auf einen Gewinn. Deutlich wird dies z.B. beim Roulette, bei dem ein *Straight* (eine bestimmte Zahl) eine Gewinnquote von 35 : 1 und eine Chance von 1 : 36 während *Odd* (eine ungerade Zahl) bei einer Chance von 1 : 1 nur die Gewinnquote 1 : 1 hat.

Chancen als Verhältnisse werden je nach Sprachraum unterschiedlich angegeben. Im deutschsprachigen Raum wird als Trenner der Doppelpunkt verwendet (z.B. 3 : 5), im englischsprachigen Raum eher der Slash oder das Minus (z.B. $3/5$ bzw. $3-5$). In beiden Fällen wird der Trenner mit „zu“ (bzw. „to“) verbalisiert.

2.2 Verhältnisse im Alltag

Der Verhältnisaspekt der Bruchrechnung ist „zweifelsohne eine wichtige Komponente des Bruchbegriffs, ist jedoch für den Aufbau der Bruchrechnung nicht tragfähig“ (Padberg und Wartha, 2017, S. 22), da mit den betrachteten Objekten - den Verhältnissen - nicht adäquat gerechnet werden kann. Im Alltag treten jedoch Verhältnisangaben häufiger als Anteilsangaben auf (vgl. Padberg und Wartha, 2017, S. 22). Dies bedeutet insbesondere, dass Schülerinnen und Schüler einen stärkeren Umweltbezug zum Verhältnis als zum Anteil haben. Im Folgenden werden kurz verschiedene Umweltbezüge zum Verhältnisaspekt betrachtet:

- Spielstände werden als Verhältnis dargestellt. Das Verhältnis 3 : 5 beim Fußball gibt an, dass die *Heimspieler* 3 Tore geschossen haben, während die Gegnermannschaft bereits 5 Tore geschossen hat.
- In Tassenrezepten, wie man sie z.B. bei `www.chefkoch.de` findet, können die Angaben als Verhältnisangaben gedeutet werden. Wird z.B. eine Tasse Reis mit zwei Tassen Wasser zum Kochen gebracht, dann ist das Volumenverhältnis beider Zutaten 1 : 2.
- Malerarbeiten im eigenen Haushalt können von Verhältnisfragen begleitet sein. Ist z.B. die passende Wandfarbe Violett ausverkauft, kann dieses Problem durch Kauf (und Mischung) der Farben Rot und Blau im Verhältnis 1 : 1 gelöst werden. Beim additiven RGB-Farbmodell werden die Anteile der Farben Rot, Grün und Blau durch Zahlen im Bereich [0,255] angegeben. Das Mischungsverhältnis 166 : 123 : 91 (166 Teile Rot, 123 Teile Grün, 91 Teile Blau) erzeugt eine milchkaffeebraune Farbe (Café au lait, vgl. `encycolorpedia.com/a67b5b`).
- Weglängenschätzungen können beim „Kartenlesen“ durchgeführt werden. Dazu muss der als Verhältnis angegebene Maßstab der Karte berücksichtigt werden. So steht z.B. 1 : 25000 dafür, dass 1 cm auf der Karte der Länge 250 m entspricht. Auch bei der Darstellung sehr kleiner Objekte etwa in Medizin und Technik spielen Maßstäbe eine wichtige Rolle.
- Auch in unmittelbarer Umgebung von Kindern, etwa in Kinderbüchern, werden Verhältnisangaben genutzt: Die drei Freunde Kokosnuss, Oskar und Jojo werden im Buch *Der kleine Drache Kokosnuss bei den wilden Tieren* von feindlich gesinnten Löwen umzingelt. Um die Unfairness der Situation deutlich zu machen betont Oskar: *„Und drei gegen vier!“* (Siegner 2017, S. 24)

Insbesondere beim letzten Punkt wird deutlich, dass Bewertungen von Verhältnissen mit einem geringeren kognitiven Anspruch durchführbar sind als Bewertungen von Anteilsangaben. Beim hier betrachteten Beispiel ist sofort ersichtlich, dass beim Verhältnis 3 : 4 die eigene Gruppe unterlegen ist. Bei der Angabe „3 von 7 Teilnehmer sind auf deiner Seite“ muss zunächst heraus gefunden werden, ob dies mehr oder weniger als die Hälfte sind, um die entsprechende Aussage bewerten zu können.

Chancen werden - wenn auch nur in wenigen alltäglichen Kontexten - als Verhältnis dargestellt. Beim Glücksspiel „Lotto Weihnachtskalender“ wird z.B. beim Gewinnplan *Rubbellos Elch* darauf hingewiesen, dass die Chance auf den Gewinn des Betrags 10 Euro dem Verhältnis 1 : 250 entspricht (vgl. `www.lotto-thueringen.de`). Genaues Nachrechnen zeigt hier allerdings, dass die Chance auf diesen Gewinn mit 1 : 249 sogar etwas höher ausfällt. Die Diskrepanz beider Verhältnisse wird dadurch verursacht, dass im ersten Fall nicht die Chance sondern das Wahrscheinlichkeitsmaß des betrachteten Ereignisses ermittelt wird. Die Alltäglichkeit der aus fachlicher Sicht falschen Verwendung des Begriffs Chance kommt hier besonders deutlich zum Ausdruck (vgl. auch Sill und Kurtzmann, 2019 S. 229).

2.3 Mathematische Beschreibung der Chance

Sei A ein Ereignis mit einer Wahrscheinlichkeit p. Dann ist die Chance $O(A)$ von A gegeben durch die Formelgleichung

$$O(A) = \frac{p}{1-p}, \tag{1}$$

d.h. die Chance ist der Quotient aus der Wahrscheinlichkeit von A und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses (vgl. Sill und Kurtzmann, 2019, S. 229).

Wird ein stochastischer Vorgang mit endlich vielen möglichen Ergebnissen betrachtet, bei welchem ein Laplace-Modell angenommen werden kann, dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A einfach zu ermitteln. Ist $m < n$ die Anzahl der für A günstigen Ergebnisse und n die Gesamtanzahl der Ergebnisse, dann gilt $P(A) = \frac{m}{n}$ und entsprechend $P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n}$. Aus (1) folgt dann unmittelbar

$$O(A) = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{n-m}{n}} = \frac{m}{n-m}. \tag{2}$$

Mit anderen Worten: Bei einem stochastischen Vorgang mit endlichen vielen möglichen Ergebnissen, bei dem ein Laplace-Modell angenommen werden kann, ist die Chance eines Ereignisses der Quotient aus den für dieses Ereignis günstigen Ergebnissen und den für dieses Ereignis ungünstigen Ergebnissen.

2.4 Die Chance als Möglichkeitenverhältnis

In Abschnitt 2.3 wird die Chance mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsmaßes definiert. In der Schule erscheint der Zugang von der Chance zum Wahrscheinlichkeitsmaß besser geeignet, da die Betrachtung der Chance auch ohne die für das Wahrscheinlichkeitsmaß wichtige Bruchrechnung auskommt. Entsprechend muss ein Zugang zum Begriff Chance gefunden werden, der ohne das Wahrscheinlichkeitsmaß auskommt.

Gleichung (2) bildet die Grundlage für diesen Zugang. Im Folgenden bezeichnen wir als *Möglichkeitenverhältnis eines Ereignisses* das Verhältnis aus den für dieses Ereignis günstigen zu den für dieses Ereignis ungünstigen möglichen Ergebnissen. Diese Bezeichnung dient im Rahmen dieses Beitrags der fachdidaktischen Analyse und wird verwendet, um dem betrachteten Verhältnis einen inhaltlichen Kontext zuzuordnen. Im Unterrichtsalltag sollte das Möglichkeitenverhältnis stets als *Chance* bezeichnet werden, wenn es als solches interpretiert werden darf.

Das Möglichkeitenverhältnis eines Ereignisses (zu einem betrachteten stochastischen Vorgang) kann von der Chance dieses Ereignisses abgegrenzt werden. Es ist bei diesem Verhältnis nicht notwendig, dem Doppelpunkt als Trenner die Funktion des Divisionszeichen zukommen zu lassen. Auf diese Weise können auch Möglichkeitenverhältnisse betrachtetet werden, die nicht unbedingt als Chance interpretiert werden können. So ist das zu einem Ereignis gehörende Möglichkeitenverhältnis 3 : 0 aus inhaltlicher Sicht nicht als Chance interpretierbar. Allerdings kann mit Hilfe dieses Verhältnisses dem betrachteten Ereignis eine qualitative Wahrscheinlichkeitsaussage zugeordnet werden. Es ist *sicher*, dass dieses eintritt. Um in diesem Zusammenhang Verunsicherungen seitens der Schülerinnen und Schüler zu vermeiden, erscheint es sinnvoll, Möglichkeitenverhältnisse auf formaler Ebene nicht mit Relationszeichen zu verknüpfen.

Genau dann darf das Möglichkeitenverhältnis eines nicht mit Sicherheit eintretenden Ereignisses als Chance dieses Ereignisses im Sinne von Gleichung (2) interpretiert werden, wenn beim betrachteten stochastischen Vorgang ein Laplace-Modell angenommen werden kann, d.h. wenn gilt: *Alle möglichen Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit einzutreten*.

2.5 Die Chance als Chancenstreifen

Sei n die Anzahl aller möglichen Ergebnisse eines stochastischen Vorgangs sowie m die Anzahl der für ein Ereignis A günstigen Ergebnisse. Dann kann das in Abschnitt 2.4 vorgestellte Möglichkeitenverhältnis $m : (n-m)$ von A auf der ikonischen Ebene wie folgt dargestellt werden. Zunächst wird ein Rechteck längs der Breite in n kongruente Teilrechtecke (Felder) zerlegt. Von links beginnend werden die ersten m Felder durch eine Farbe, die Gewinnfarbe, markiert. Die so entstandene Darstellung bezeichnen wir als *Chancenstreifen zum Ereignis A* (vgl. Hohloch, 2019, S. 26). Abb. 1 stellt einen Chancenstreifen zum Möglichkeitenverhältnis 3 : 4 dar.

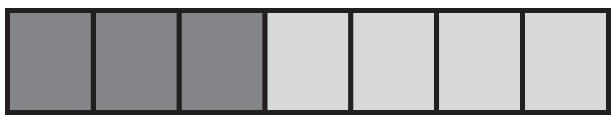


Abb. 1: Chancenstreifen zum Möglichkeitenverhältnis 3 : 4

Kann beim betrachteten Vorgang ein Laplace-Modell angenommen werden, dann repräsentiert jedes Kästchen des Chancenstreifens den Wahrscheinlichkeitsanteil des entsprechenden möglichen Ergebnisses des Vorgangs. Somit kann die in der Gewinnfarbe unterlegte Fläche bezogen auf den gesamten Streifen als Gewinnanteil interpretiert werden. In diesem Fall kann gesagt werden: *Je mehr Fläche des Chancenstreifens durch die Gewinnfarbe markiert ist, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass das betrachtete Ereignis eintritt.*

3 Fachdidaktiche Überlegungen

3.1 Qualitative Wahrscheinlichkeitsaussagen

In Vorbereitung auf die Methode *Chancenstreifen*, werden im Folgenden Ideen aufgezeigt, wie Wahrscheinlichkeiten qualitativ mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsstreifens geschätzt werden können (vgl. dazu auch Sill und Kurtzmann 2019, S. 80–83).

Bereits in der Primarstufe sollen die Schülerinnen und Schüler eine inhaltliche Vorstellung zur Wahrscheinlichkeit entwickeln. Es wird daher vorgeschlagen, dass sie Ereignisse auf ihre Eintrittswahrscheinlichkeit hin überprüfen. Dazu werden Ereignisse genutzt, die entweder mit hoher oder mit sehr niedriger Wahrscheinlichkeit eintreten. Die Kinder werden motiviert, über Einflussfaktoren nachzudenken um festzustellen, dass der Eintritt in der Zukunft liegender Ereignisse nicht absolut *sicher* bzw. nicht völlig *unmöglich* ist. (vgl. z.B. Spindler,2010) Zur qualitativen Beschreibung der Eintrittswahrscheinlichkeiten werden den Schülerinnen und Schülern verschiedene Schätzwerte zur Verfügung gestellt, im einfachsten Fall die Schätzwerte *sicher*, *wahrscheinlich*, *unwahrscheinlich* und *unmöglich* (vgl. Sill und Kurtzmann 2019, S. 83). Um insbesondere Schätzungen im Bereich der Enden des Wahrscheinlichkeitsintervalls zu ermöglichen, werden im weiteren Schulverlauf weitere Schätzwerte zur Verfügung gestellt (vgl. Sill und Kurtzmann 2019, S. 129). In diesem Beitrag folgen wir den Schätzwertbezeichnungen aus Abb. 2 auf der nächsten Seite.

Sill und Kurtzmann (2019) stellen eine Methode vor, wie die betrachteten Schätzwerte inhaltlich besetzt und veranschaulicht werden können (vgl. Sill und Kurtzmann 2019, S. 80ff). Im einfachsten Fall wird dazu die Rückseite eines Lineals möglichst mit einer Länge von 30 cm verwendet. Das Lineal wird hochkant gehalten. Eine am Lineal befestigte Klammer markiert die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des zugehörigen Ereignisses. Dabei werden die Punkte *völlig unmöglich* und *absolut sicher* durch eine gesonderte Klammersetzung hervorgehoben. Die einzelnen Bereiche der so veranschaulichten Wahrscheinlichkeitsskala - im Folgenden wird diese Applikation *Wahrscheinlichkeitsstreifen* genannt - werden mit den Schülerinnen und Schülern zusammen erarbeitet. Eine Klammersetzung in der unteren Hälfte des Wahrscheinlichkeitsstreifens markiert dabei ein *weniger wahrscheinliches* Ereignis, während eine Klammersetzung in der oberen Hälfte ein *eher wahrscheinliches* Ereignis markiert. Die Schülerinnen und Schüler werden in diesem Zusammenhang dafür sensibilisiert, dass die Wahrscheinlichkeit ein *Erwartungsgefühl für den Eintritt* dieses Ereignisses ist, eine inhaltliche Vorstellung, die für die spätere prognostische Interpretation quantitativer Wahrscheinlichkeiten wichtig ist.

Die Mitte des Wahrscheinlichkeitsstreifens erhält zunächst keine eigene Markierung. Es erscheint jedoch sinnvoll, diese Stelle für bestimmte Fälle hervorzuheben. So kann im weiteren Unterrichtsverlauf die Klammersetzung in der Mitte des Streifens so begründet werden, dass es keinen plausiblen Grund gibt, dass das Ereignis *eher wahrscheinlich* aber auch keinen, dass es *weniger wahrscheinlich* eintritt. Eine weitere Interpretation der Mitte des Wahrscheinlichkeitsstreifens kann mit Hilfe des Chancenstreifens erarbeitet werden und führt zur Bezeichnung *Fifty-Fifty* (vgl. Abschnitt 3.3).

3.2 Die Methode Chancenstreifen

Die Herstellung des Chancenstreifens eines Ereignisses zu einem stochastischen Vorgang mit n möglichen Ergebnissen kann im Unterricht nach folgendem Ablaufplan erfolgen:

(C1) Überprüfen der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Ergebnisse

(C2) Bestimmen der Anzahl n der möglichen Ergebnisse

(C3) Bestimmen der Anzahl m der für den Eintritt des betrachteten Ereignisses günstigen Ergebnisse (*Gewinn*)

(C4) Erstellen eines Chancenstreifen mit n gleichgroßen Feldern

(C5) Markieren der *m Gewinnfelder*

Die Überprüfung in (C1) ist notwendig um zu gewähren, dass das betrachtete Möglichkeitenverhältnis als Chance interpretiert werden darf. Dieser Schritt sollte erst zu Beginn der Sekundarstufe I erarbeitet werden. Ein mögliches Projekt wird dazu in Abschnitt 3.6 vorgestellt.

Da der Arbeitsschritt (C1) in der Primarstufe noch nicht durchgeführt wird, werden in diesen Klassenstufen nur stochastische Vorgänge betrachtet, bei denen ein Laplace-Modell angenommen werden kann. Glückspielsituationen wie etwa das blinde Ziehen gleichförmiger Lose motivieren dabei die Bezeichnungen *Gewinnanzahl* für die Anzahl der für den Gewinn günstigen Ergebnisse sowie die entsprechende *Verlustanzahl*. In der Sekundarstufe I werden dann die Spielsituationen verallgemeinert und mit Hilfe des Ereignisbegriffs umschrieben.

Solange Chancenstreifen nicht miteinander verglichen werden, kann die Erstellung eines Chancenstreifens im Sinne von (C4) additiv erfolgen. Es wird dabei die Länge eines Feldes festgelegt. Dann werden entsprechend n Felder dieser Größe aneinandergereiht. Ist die Anzahl der möglichen Ergebnisse z.B. $n = 8$, dann wird festgelegt, dass die Länge eines Feldes 1 cm ist. Durch das Aneinanderreihen entsteht ein Chancenstreifen der Länge 8 cm.

Bei der Markierung der Gewinnfelder im Sinne von (C5) muss die Anweisung erfolgen, dass die Felder von links hintereinander weg in der Gewinnfarbe markiert werden. Dabei kann die Verhältnisschreibweise das Vorgehen erklärend unterstützen. Es kann eine farbliche Kodierung der Verhältnisangabe erfolgen. Dabei wird die Gewinnanzahl (vor dem Doppelpunkt) in der Gewinnfarbe markiert und die Verlustanzahl (nach dem Doppelpunkt) in der Verlustfarbe. Es sollen die linken Felder bis zum Doppelpunkt in der Gewinnfarbe markiert werden, die anschließenden Felder in der Verlustfarbe (vgl. Hohloch, 2019).

Der im Sinne von (C2) bis (C5) zu einem Ereignis erstellte Chancenstreifen ist Ausgangspunkt für verschiedene vertiefende Aktivitäten, die in den Abschnitten 3.3, 3.4 und 3.5 vorgestellt werden.

3.3 Interpretieren des Chancenstreifens

Im Folgenden werden Vorgänge betrachtet, bei denen die Voraussetzungen im Sinne von (C1) erfüllt sind. Im Kontext absoluter Häufigkeiten kann der Chancenstreifen als Banddiagramm interpretiert werden. Ein entscheidender Vorteil eines solchen Anteilsdiagramm ist, dass bei „der Erstellung eines Banddiagramms (...) Schüler noch ohne die Berechnung relativer Häufigkeiten“(Krüger, Sill und Sikora, 2015, S. 48) auskommen. Weiterhin ist aus dem Banddiagramm gut der Anteil ablesbar, der über die Hälfte hinaus geht. Mit Blick auf qualitative Wahrscheinlichkeitsaussagen, kann vor dem Hintergrund, dass der Flächenanteil des Chancenstreifens den Wahrscheinlichkeitsanteil des zugehörigen Ereignisses darstellt, durch einfaches Ablesen (mehr als die Hälfte oder eben nicht) entschieden werden, ob das betrachtete Ereignis *eher* oder *weniger wahrscheinlich* ist. Nicht immer ist auf der ikonischen Ebene sofort ersichtlich, dass die betrachtete Gewinnfläche größer als die Hälfte ist. Hier hilft es, den ausgeschnittenen Chancenstreifen in der Mitte zu knicken. Ist nun der Knick innerhalb der Gewinnfläche, dann ist diese größer als die Hälfte.

Eine weitere Möglichkeit ist der direkte Vergleich des Chancenstreifens mit dem in Abschnitt 3.1 beschriebenen Wahrscheinlichkeitsstreifen (Abb. 2).

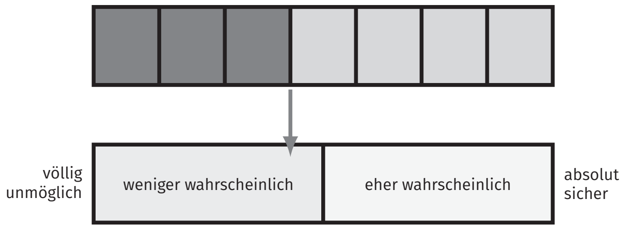


Abb. 2: Zuordnung einer qualitativen Wahrscheinlichkeit zum Chancenstreifen für ein Ereignis mit der Chance 3 : 4

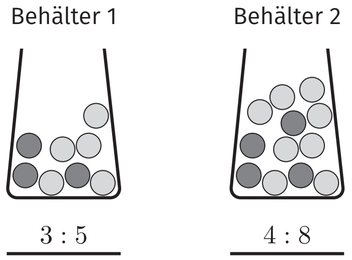
Aus den Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen im Sinne von Abb. 2 heraus können weitere Eigenschaften von Chancen abgeleitet werden. So kann erarbeitet werden, dass das Ereignis A mit einer Chance $m : k$ genau dann *eher wahrscheinlich* ist, wenn $m > k$ und entsprechend *weniger wahrscheinlich*, wenn $m < k$ gilt.

Aus dem Vergleich von Chancenstreifen und Wahrscheinlichkeitsstreifen heraus kann ein weiterer Aspekt der Mitte des Wahrscheinlichkeitsstreifens erarbeitet werden (vgl. Abschnitt 3.1). Wird etwa der Chancenstreifen zu einem Ereignis mit der Chance $m : m$ betrachtet, dann fällt bei der Zuordnung im Sinne von Abb. 2 der Zuordnungspfeil auf die Mitte des Wahrscheinlichkeitsstreifens. Dies motiviert die Bezeichnung der Mitte mit der englischen Verbalisierung *Fifty-Fifty*.

3.4 Vergleich von Chancen

Im Folgenden wird aufgezeigt, wie einfach sich der Chancenvergleich gestaltet, wenn ein Darstellungswechsel (hin zum Chancenstreifen) vorgenommen wird. Dazu wird die in Abb. 3 auf der nächsten Seite dargestellte Aufgabe betrachtet.

Ist die Bruchrechnung den Schülerinnen und Schülern bekannt, dann kann die Aufgabe durch arithmetischen Vergleich der als Brüche zu deutenden Möglichkeitenverhältnisse gelöst werden. „Ein Vergleich von Chancen ohne Verwendung der Bruchrechnung ist allerdings (...) oft sehr anspruchsvoll.“ (Sill und Kurtzmann, 2019, S. 232) Im betrachteten Beispiel könnte die verbalisierte Argumentation in etwa so lauten: „*In Behälter 2 sind doppelt so viele hellgraue wie dunkelgraue Kugeln enthalten. Damit dies in Behälter 1 auch zutrifft, müsste noch eine weitere hellgraue Kugel hinzugefügt werden. Somit sind im Behälter 1 im Vergleich zu den hellgrauen Verlust-Kugeln mehr dunkelgraue Gewinn-Kugeln vorhanden. Ich wähle daher Behälter 1.*“



Du gewinnst, wenn du eine dunkelgraue Kugel ziehst. Aus welchem Behälter ziehst du? Begründe.

Abb. 3: In Anlehnung an Beispiel 3 aus (Sill und Kurtzmann 2019, S. 232)

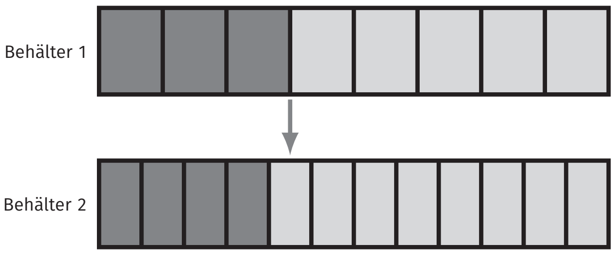


Abb. 4: Ikonischer Vergleich der Gewinnchancen aus Abb. 3

Mit Hilfe der Chancenstreifen gelingt ein Vergleich der Gewinnchancen auf der ikonischen Ebene. Dabei werden die Chancenstreifen entsprechender Möglichkeitenverhältnisse erstellt und miteinander verglichen. Es ist darauf zu achten, dass beide Chancenstreifen die gleiche Länge haben. Zu dem in Abb. 3 betrachteten Beispiel kann dabei wie folgt vorgegangen werden. Das kleinste gemeinsame Vielfache der Feldanzahlen der jeweiligen Streifen 8 und 12 ist 24. Es werden also zwei Streifen der Länge 12 cm (d.h. 24 Kästchen) erzeugt. Für die Chance 3 : 5 wird die Einteilung 1,5 cm (d.h. 3 Kästchen) pro Feld verwendet und für die Chance 4 : 8 entsprechend die Einteilung 1,0 cm (d.h. 2 Kästchen). In der Primarstufe wird die Aufteilung von der Lehrkraft vorgegeben. Zu Beginn der Sekundarstufe I kann die Aufteilung zusätzlich durch verbalisierte Überlegungen der Lehrkraft motiviert werden. Durch Vergleich beider Chancenstreifen lässt sich nun ablesen, dass bei Behälter 1 die Gewinnchancen höher sind (Abb. 4).

3.5 Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten

Zu Beginn der Sekundarstufe I können die Ideen aus Abschnitt 3.3 genutzt werden, um eine Quantifizierung von Wahrscheinlichkeitsangaben zu unterstützen. Motiviert wird die Quantifizierung dabei durch die Idee, einen „von allen akzeptierten „objektiven“ Wert für die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses“ (Krüger, Sill und Sikora, 2015, S. 78) anzugeben. Exemplarisch wird hier das Beispiel des Werfens der Augenzahl 6 mit einem klassischen Spielwürfel betrachtet. Die Schülerinnen und Schüler schätzen die Wahrscheinlichkeit des Eintritts dieses Ereignisses und markieren es entsprechend am Wahrscheinlichkeitsstreifen. Im Klassengespräch stellen sie fest, dass zwar alle Schülerinnen und Schüler den Bereich *weniger wahrscheinlich* gewählt haben, jedoch die Klammern an unterschiedlichen Stellen liegen. Das Erstellen eines der Länge des Wahrscheinlichkeitsstreifens entsprechenden Chancenstreifens zum betrachteten Ereignis und das Abtragen des Farbwechsels auf den Wahrscheinlichkeitsstreifen (vgl. Abb. 2 auf der vorherigen Seite) führt zu einer vereinheitlichten Klammersetzung und damit zum gesuchten objektiven Wert.

Mit dem in der Primarstufe erworbenen Wissen zur Größe *Länge* erhalten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, den Wert der Wahrscheinlichkeit „nachzumessen“. Dazu werden auf einem Wahrscheinlichkeitsstreifen der Länge 10 cm die einzelnen Zentimeter abgetragen und entsprechend mit den Dezimalzahlen 0,1; 0,2 bis 0,9 markiert (vgl. Krüger, Sill und Sikora, 2015, S. 77). Erfolgt nun die Klammersetzung im Sinne obiger Überlegungen, ist ein Zahlenwert für das Ereignis *Werfen der Augenzahl 6* direkt am Wahrscheinlichkeitsstreifen ablesbar. Ein Wert zwischen 0,1 und 0,2 kann als erste Näherung für weitere Betrachtungen verwendet werden.

Vertiefend kann zum Beispiel untersucht werden, ob bei den anderen Augenzahlen ähnliche Werte herauskommen, ob und um wie viel die *Gewinnchance* bei zwei Augenzahlen höher ist. Weiterführend kann auf diese Weise die Kontrollregel für Wahrscheinlichkeiten (vgl. Krüger, Sill und Sikora, 2015, S. 80) erarbeitet werden.

3.6 Überprüfung der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit

Ob Möglichkeitenverhältnisse als Chancen interpretiert werden dürfen, hängt eng mit der Frage zusammen, ob beim betrachteten stochastischen Vorgang eine Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeit angenommen werden darf. Typischerweise wird dies zu Beginn der Sekundarstufe I thematisiert. Schülerinnen und Schüler erarbeiten im Rahmen von Prozessbetrachtungen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, um eine Gleichwahrscheinlichkeit anzunehmen (vgl. Krüger, Sill und Sikora 2015, S. 88).

Zur Motivation der Notwendigkeit der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit bei der Interpretation von Möglichkeitenverhältnissen als Chancen wird im Folgenden ein Projekt vorgeschlagen, in welchem die Schülerinnen und Schüler anhand eines Spiels erfahren, dass Möglichkeitenverhältnisse nicht immer eine Aussage über die Eintrittswahrscheinlichkeit der zugehörigen Ereignisse liefern. Hohloch betrachtet in ihrer Masterarbeit das Spiel „Der Hase und die Schildkröte“ nach Pöhls (2012), welches für diesen Beitrag leicht angepasst wurde und in Abbildung Abb. 5 vorgestellt wird.

Ihr spielt zu zweit und seid entweder Schildkröte oder Hase. Stellt die Spielfigur auf das Startfeld. Bei einer geraden Augenzahl rückt sie jeweils um ein Feld nach links, bei ungerade um ein Feld nach rechts. Gewonnen hat das Tier, auf dessen Feld die Spielfigur nach dreimaligen Würfelwurf stehen bleibt.

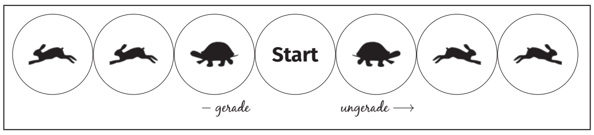


Abb. 5: In Anlehnung an das Lernspiel „Der Hase und die Schildkröte“ aus (Pöhls, 2012, S. 33)

Im Rahmen einer Prozessbetrachtung wird das Merkmal „*Standort der Spielfigur nach dreimaligen Würfelwurf*“ untersucht. Die möglichen Ergebnisse sind die sieben im Spielplan aus Abb. 5 vorhandenen Felder. Die für den Gewinn der Schildkröte günstigen Fälle sind diejenigen Felder, auf denen die Schildkröte abgebildet ist. Entsprechend ist das Möglichkeitenverhältnis für den Gewinn der Schildkröte 2 : 5. Das Möglichkeitenverhältnis für den Gewinn des Hasen ist entsprechend 4 : 3. Unter der Annahme, dass jedes mögliche Ergebnis mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt, können die Möglichkeitenverhältnisse als Chance interpretiert werden und führen durch Vergleich (etwa mit Hilfe der zugehörigen Chancenstreifen) zur Aussage, dass es wahrscheinlicher ist, dass der Hase gewinnt.

In Abb. 6 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum betrachteten Merkmal angegeben. Es wird deutlich, dass hier eine Gleichwahrscheinlichkeit der möglichen Ergebnisse nicht vorliegt. Insbesondere gibt es drei Felder, für die es *unmöglich* ist, dass die Spielfigur nach dreimaligen Würfelwurf hier zum Stehen kommt. Die gefundenen Möglichkeitenverhältnisse dürfen damit nicht als Chance interpretiert werden.

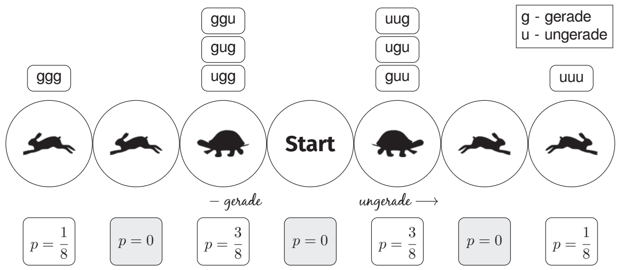


Abb. 6: Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Lernspiel „Der Hase und die Schildkröte“

Nachdem im Rahmen des Projekts zunächst eine Prozessbetrachtung durchgeführt und die Vermutung geäußert wurde, dass der Hase öfter gewinnt, wird das Spiel von den Schülerinnen und Schülern gespielt. Die Gewinne werden in einer Tabelle protokolliert. Aufgrund der geringen Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses „Der Hase gewinnt“ kann erwartet werden, dass aus der protokollierten Tabelle deutlich hervorgeht, dass die Schildkröte öfter als der Hase gewinnt. Dies wird durch das Zusammenfassen aller Spielergebnisse an der Tafel empirisch abgesichert. Die Vermutung, dass der Hase öfter gewinnt, muss demnach verworfen werden. Gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern wird nun der Frage nachgegangen, warum die Vermutung nicht zutrifft. Es wird dabei Schritt (C1) der Methode Chancenstreifen aus Abschnitt 3.2 erarbeitet.

Die Überprüfung, ob eine Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Ergebnisse angenommen werden darf, erfolgt erneut mit Hilfe einer Datenerhebung. Diesmal wird der *Standort der Spielfigur nach dreimaligen Würfelwurf* protokolliert. Dazu werden die einzelnen Felder des Spielplans durchnummeriert und in einer Tabelle mit entsprechenden Spalten erfasst. Aufgrund der Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Ergebnisse des betrachteten

Merkmals bleiben drei Spalten der Tabelle bei der Datenerhebung mit Sicherheit leer. Gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern wird die Annahme geäußert, dass es *sehr unwahrscheinlich* ist, dass die Spielfigur diese Felder nach dreimaligen Würfelwurf erreicht. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, eines der anderen Felder zu erreichen deutlich höher. Die Annahme der gleichen Eintrittswahrscheinlichkeit jedes Feldes im Sinne einer Gleichwahrscheinlichkeit muss verworfen werden. Es wird hervorgehoben, dass aus diesem Grund das Möglichkeitenverhältnis nicht als Chance interpretiert werden darf.

Das Spiel kann in einer späteren Klassenstufe bei der Betrachtung *mehrstufiger stochastischer Vorgänge* erneut untersucht werden. Das betrachtete Merkmal ist dann die Reihenfolge der Augenzahlen beim dreimaligen Würfelwurf. Bei der Erfassung von gerader und ungerader Augenzahl kann nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung der acht möglichen Ergebnisse (vgl. Abb. 6 auf der vorherigen Seite) mit Hilfe eines Baumdiagramms bestimmt werden. Die bei dieser Modellierung gefundene Gleichverteilung ermöglicht die Interpretation gefundener Möglichkeitenverhältnisse als Chance. Die Chance, dass die Schildkröte gewinnt kann nach einer entsprechenden Analyse im Sinne von Abb. 6 auf der vorherigen Seite angegeben werden, sie ist 6 : 2 bzw. 3 : 1. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Schildkröte gewinnt, dreimal höher als die, dass der Hase gewinnt.

4 Ausblick zur unterrichtsmethodischen Umsetzung

Unser Beitrag stellt einen konkreten Ablaufplan zur Herstellung von Chancenstreifen vor. Diese Handlungsanweisung ist eng mit der Erarbeitung des Begriffs „Chance“ verbunden. Entsprechend entsteht bei der unterrichtsmethodischen Umsetzung die Frage, in welcher Weise Chance und Chancenstreifen eingeführt werden sollten. Weiterhin ist zu untersuchen, inwieweit das hier vorgestellte Hilfsmittel zur Differenzierung bei realitätsnahen Aufgaben geeignet ist. Insbesondere stellt sich die Frage, inwieweit Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Sekundarstufe I in die Lage versetzt werden können, eigene Chancenstreifen (etwa zum Vergleich) herzustellen.

Danksagung: Die Autor*innen danken den Gutachter*innen und Herrn Joachim Engel für die anregenden Impulse und diverse Verbesserungsvorschläge.

Literatur

Hohloch, L. (2019): Gewinnchancen vergleichen - Erprobung eines Konzepts mit Schülerinnen und Schülern einer 4. Klasse zum Aufbau inhaltlicher Vorstellungen zum Chancebegriff. Masterarbeit, Universität Erfurt

Krüger, K. und Sill, H.-D. und Sikora, C. (2015): Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe. Berlin: Springer Spektrum

Kurtzmann, G. und Sill, H.-D. (2014): Leitidee „Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit“. 2. Auflage. Rostock: Universitätsdruck

Padberg, F. und Wartha, S. (2017): Didaktik der Bruchrechnung, 5. Auflage. Berlin: Springer Spektrum

Pöhls, A. (2012): Gewinnchancen analysieren: Der Hase und die Schildkröte. In: *Grundschule Mathematik* 32, S. 32–35.

Siegner, I. (2017): Der kleine Drache Kokosnuss bei den wilden Tieren. München: cbj Kinder- und Jugendbuchverlag

Sill, H.-D. und Kurtzmann, G. (2019): Didaktik der Stochastik in der Primarstufe. Berlin: Springer Spektrum

Spindler, N. (2010): Ist es wahrscheinlich, dass die Lehrerin auf dem Heimweg einen Unfall hat? In: *Mathematik differenziert* 3, S. 34–39

Anschrift des Verfassers
Andreas Kirsche
Kirchgasse 1
99310 Arnstadt
andreas.kirsche@posteo.de

Anschrift der Verfasserin
Lisza Hohloch
Schulsteig 2
19079 Banzkow
lisza.h@gmx.de